APUNTES DE FÍSICA

DE 2º DE

BACHILLERATO

José Luis Serrano Álvarez

1er Tema: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

INDICE:

1.1-REPASO DE VECTORES

Las magnitudes se clasifican en escalares y vectoriales:

- Las magnitudes **escalares** son aquellas que quedan definidas mediante un número y su unidad. Ejemplo: masa, tiempo, volumen, etc.
- Las magnitudes **vectoriales** son aquellas que para definirlas, además del número y su unidad hay que indicar la dirección, el sentido y el punto de aplicación.

Las magnitudes vectoriales, se representan mediante vectores que son segmentos orientados en los cuales hay que distinguir:

- **El módulo:** que es el número y su unidad e indica el tamaño del vector.
- **La dirección:** que es la recta por la que se mueve el vector.
- **El sentido:** que indica hacia donde se desplaza el vector.
- **El punto de aplicación:** que determina el origen.

En función del punto de aplicación los vectores se clasifican en:

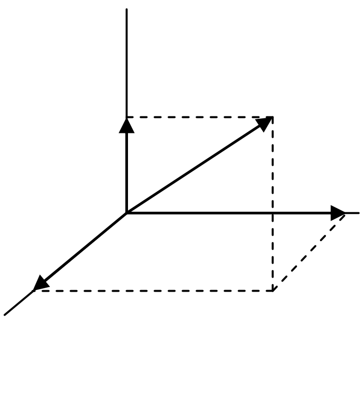
- **Fijos:** cuando el punto de aplicación no se mueve
- **Deslizantes:** cuando el punto de aplicación se mueve a lo largo de la recta de dirección.
- **Libres:** cuando el punto de aplicación se puede poner en cualquier punto del espacio.

Se denomina **vector unitario** a un vector que tiene por módulo la unidad, y cualquier vector se puede expresar en función de su módulo y su vector unitario.

$$\vec{a} = a.\vec{\mu}_a \quad \Rightarrow \quad \vec{\mu}_a = \frac{\vec{a}}{a}$$

Los vectores en el espacio se representan mediante sistemas de coordenadas cartesianas, de tal forma que las componentes son las proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes de las coordenadas cartesianas.

$$\overrightarrow{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$



$$\overrightarrow{|V|} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Se denominan **cosenos directores** a los cosenos de los ángulos que forman el vector con cada uno de los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{V_x}{V} \\ \\ \cos\beta = \frac{V_y}{V} \\ \\ \cos\gamma = \frac{V_z}{V} \end{array}\right\} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{V_x^2}{V^2} + \frac{V_y^2}{V^2} + \frac{V_z^2}{V^2} = \frac{V_x^2+V_y^2+V_z^2}{V^2} = \frac{V^2}{V^2} = 1$$

Y como el vector unitario es:

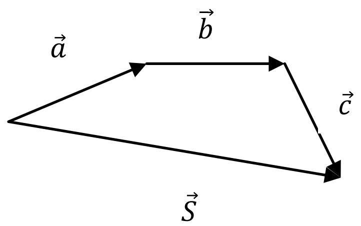
$$\vec{\mu}_v = \frac{\vec{V}}{V} = \frac{V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}}{V} = \frac{V_x}{V}\vec{\imath} + \frac{V_y}{V}\vec{\jmath} + \frac{V_z}{V}\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

Con lo que las componentes de un vector unitario son sus cosenos directores

1.2-OPERACIONES CON VECTORES

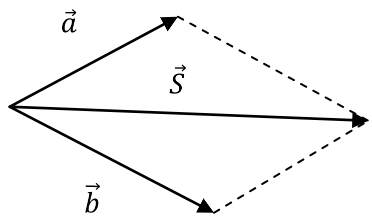
- **SUMA DE VECTORES**

Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ ***y*** $\vec{\boldsymbol{c}}$ para sumarlos se dibuja a continuación del extremo del 1º, el origen del 2º, y así sucesivamente, de tal forma que el vector suma es el segmento que une el origen del 1º con el extremo del último. Ejem:



$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Si solo sumamos 2 vectores, el vector $\vec{\boldsymbol{S}}$ es la diagonal del paralelogramo:



El vector suma tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Propiedad asociativa respecto a la suma $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Vector opuesto a uno dado: ($\overrightarrow{b'} = -\vec{b}$) Es un vector que tiene el mismo módulo, dirección pero sentido contrario.

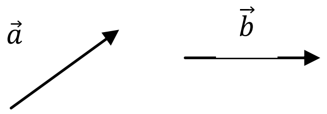
Si los vectores vienen dados en función de sus componentes, la suma es:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \\ \\ \vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\end{array}\right\} \qquad \vec{S} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{\imath} + (a_y + b_y)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

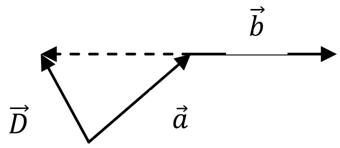
- **DIFERENCIA DE VECTORES**

La diferencia de vectores es igual a la suma de un vector con el opuesto del otro.

$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b'}$



$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$



Si los vectores vienen en función de sus componentes:

$$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{\imath} + (a_y - b_y)\vec{\jmath} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

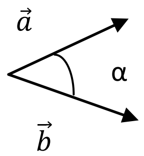
- **PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR**

El producto de un escalar por un vector es otro vector que tiene la misma dirección y sentido que el primero y por módulo el producto del escalar por el módulo del vector

$$\vec{p} = a\,.\,\vec{b} = (a.b)\overrightarrow{\mu_b}$$

- **PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES**

El producto escalar de dos vectores es un escalar que es igual al producto del módulo del primer por el módulo del segundo por el coseno del ángulo que forman.



$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a.b.\cos\alpha$$

Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Cumple la condición de perpendicularidad es decir que si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar vale cero

  Si $\quad \vec{a} \quad \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Si los vectores vienen dados en función de sus componentes, su producto escalar vale:

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\overrightarrow{k}$$

$$\underline{\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\overrightarrow{k}}$$

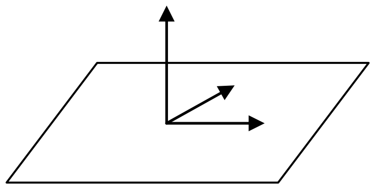
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (b_x \cdot a_x) + (b_y \cdot a_y) + (b_z \cdot a_z)$ Es un escalar ya que:

$\vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 1 \cdot 1 \cos 90° = 0$

$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cos 0° = 1$

- **PRODUCTO VECTORIAL DE 2 VECTORES**

Dados Dos vectores, el vector $\vec{a}$ y el $\vec{b}$, el producto vectorial $\left(\vec{a}\ \wedge \vec{b}\right)$ es un vector que tiene:



Por módulo: $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = a \cdot b \sin \alpha$

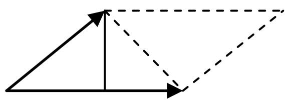
Dirección: recta perpendicular al plano que contiene a los 2 vectores

Sentido: viene dado por la regla del sacacorchos, que es el de avance de un sacacorchos que gira en el sentido de llevar el 1er vector sobre el 2º por el camino más corto

Propiedades:

- Distributiva respecto a la suma: $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- No cumple la conmutativa: $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$
- Cumple la condición de paralelismo, es decir si dos vectores son paralelos, su producto vectorial vale 0

  Si $\vec{a} \quad \vec{b} \Rightarrow \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = a \cdot b \sin 0° = a \cdot b \cdot 0 = 0$
- El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo formado por los dos vectores



$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = a \cdot b \sin \alpha = a \cdot h = A_p$

y $A_{triángulo} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$

Si los vectores vienen dados en función de sus componentes, el producto vectorial sería:

$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$

$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x b_y\right)\vec{k} - \left(a_x b_z\right)\vec{\jmath} - \left(a_y b_x\right)\vec{k} + \left(a_y b_z\right)\vec{\imath} + \left(a_z b_x\right)\vec{\jmath} - \left(a_z b_y\right)\vec{\imath} =$
$\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{\imath} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)k$

Ya que:

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 1 \cdot 1 \sin 0 = 0$$

Y

$\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$	$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$	$\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$
$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$	$\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$	$\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$

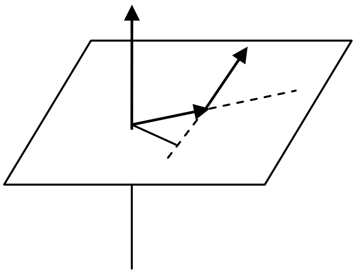
El producto vectorial también se puede obtener mediante el siguiente determinante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} =$$

$$(a_y b_z - a_z b_y)\vec{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Se observa que mientras el producto escalar es un escalar, el vectorial es un vector.

2.1- MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO



El momento de un vector o de una fuerza con respecto a un punto es igual al producto vectorial del vector de posición de dicho vector con respecto al punto $(\vec{r})$ por el vector $(\vec{v})$

$$\boxed{\vec{M}_v = r \wedge \vec{v}}$$

Este vector tiene:

- **Por módulo:** el producto de los módulos de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ por el seno del ángulo que forman $|\vec{M}_v| = r \cdot v \sin\alpha$ y como $r \cdot \sin\alpha = h \Rightarrow |\vec{M}_v| = r \cdot v \sin\alpha = v \cdot h$
- **Dirección:** es perpendicular al plano que contiene al vector y al punto.
- **Sentido:** viene dado por la regla del sacacorchos o de la mano derecha

El momento del vector $\vec{M}_v$ vale 0 si el origen de $\vec{v}$ coincide con el origen, o si la dirección de $\vec{v}$ pasa por el punto O

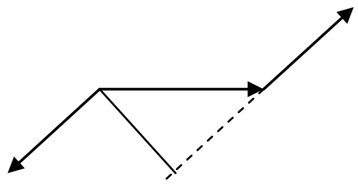
El valor máximo del momento $\vec{M}_v$ se produce cuando $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{r}$

El momento de un vector con respecto a un punto no varía si el punto de aplicación del vector se encuentra siempre en la recta de su dirección.

Si $\vec{v}$ y $\vec{r}$ vienen dados en función de sus componentes el momento del vector $(\vec{M}_v)$ se pude calcular así:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = r_x\vec{\imath} + r_y\vec{\jmath} + r_z\vec{k} \\ \\ \vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \end{array}\right\} \qquad \vec{M}_v = \vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Se denomina **par de fuerzas o par vectorial** a dos vectores del mismo módulo, direcciones paralelas, pero de sentido contrario



$\vec{R} = \vec{a} + \overrightarrow{a'} = 0$ Aunque la resultante de un par de fuerzas vale 0, generan un movimiento de rotación, debido al momento del par de vectores que es igual al producto vectorial del vector de posición entre los dos vectores ($\boldsymbol{\vec{r}}$) multiplicado por uno de los vectores

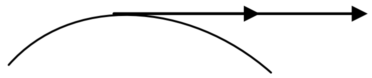
$\vec{M}_p = \vec{r}\ \wedge\ \vec{a}$ y $|\vec{M}_v| = r \cdot a \sin\alpha = a \cdot d$ donde **d** es la mínima distancia entre los dos vectores.

DERIVADA DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN ESCALAR

La derivada de un vector con respecto a un escalar, cuando el vector viene dado en función de sus componentes, que son función del escalar, es igual a la derivada de cada una de las componentes respecto al escalar.

Ejemplo: $\overrightarrow{v(t)} = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}$ $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k}$

<u>3.1- MOMENTO LINEAL. CONSERVACIÓN DEL MISMO</u>



El momento lineal o cantidad de movimiento, es un vector que es igual al producto de la masa del cuerpo por su velocidad, por lo tanto es un vector que tiene por módulo el producto de la masa por el módulo del vector, y por dirección y sentido el mismo que el vector, luego el vector momento lineal siempre es tangente a la trayectoria en cualquier punto de la misma.

En el S.I la unidad del momento lineal es: kg . m/s

La variación del momento lineal con respecto al tiempo es igual a la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ese punto.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{R}_F}$$

Efectivamente si:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si m=cte} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \quad y \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F} \\ \\ \text{Pero si } m \neq cte \Rightarrow \frac{dm}{dt} \neq 0 \quad y \quad \sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ \\ \text{Y} \quad \sum \vec{F} - \frac{dm}{dt}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \end{array} \right.$$

Luego el 2º principio de la dinámica se cumple si consideramos que $\boldsymbol{\frac{dm}{dt}\vec{v}}$ actúa como una fuerza que es lo que ocurre en un cohete en donde la pérdida de masa actúa como una fuerza impulsora suplementaria.

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN

El principio de conservación del momento lineal dice "Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo vale 0, su momento lineal se conserva"

Si $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$

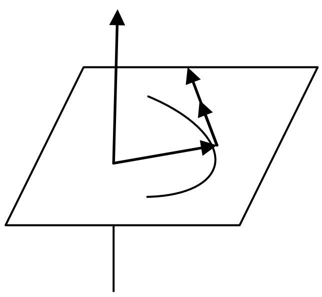
$$\text{Luego como } p = mv = cte \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } m = cte \Rightarrow v = cte \begin{cases} v = 0 \text{ (en reposo)} \\ v = cte \text{ (m.r.u)} \end{cases} \\ \text{Si } m \neq cte \begin{cases} \text{si } m\uparrow \Rightarrow v\downarrow \\ \text{si } m\downarrow \Rightarrow v\uparrow \end{cases} \end{array} \right.$$

Por otra parte:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{R}_F \quad ; \quad \boxed{d\vec{p} = \vec{R}_F \cdot dt}$$ Expresión del impulso lineal

Si la variación es finita: $\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{R}_F \cdot \Delta t}$

4.1- MOMENTO ANGULAR. CONSERVACIÓN DEL MISMO



El momento angular o cinético de un cuerpo respecto a un punto, es el momento del vector momento lineal ($\vec{p}$) de dicho cuerpo con respecto al punto

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

$\vec{L}$ es un vector que tiene:

- **Por módulo:** L = r . m . v sen α
- **Por dirección:** La recta perpendicular al plano que contiene al vector y al punto
- **Por sentido:** viene dado por la regla del sacacorchos

En el S.I la unidad del momento angular es **kg . m^2/s**

5.1- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN PARA UNA PARTÍCULA

La ecuación fundamental de la dinámica de rotación de una partícula dice: "la variación del momento angular de una partícula con respecto a un punto, con respecto al tiempo, es igual a la resultante de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre dicha partícula"

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} = \vec{M}_r}$$

Demostración:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \ \wedge \ \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ \wedge \ \vec{p} + \vec{r} \ \wedge \ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \ \wedge \ \vec{p} + \vec{r} \ \wedge \ \sum \vec{F}$ pero como $\vec{v} \ \wedge \ \vec{p} = 0$ por ser

$\vec{v} \quad \vec{p}$ Queda $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \ \wedge \ \sum \vec{F} = \sum \vec{M} = \vec{M}_R$

La conservación del momento angular dice que cuando el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo vale 0, su momento angular se conserva.

$$\sum \vec{M} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{L} = cte$$

$$\sum \vec{M} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si} \quad \sum \vec{F} = 0 \\ \text{Si} \quad \sum \vec{F} \quad \vec{r} \end{array} \right\} \quad \text{ya que} \qquad \sum \vec{M} = \vec{r} \ \wedge \ \sum \vec{F}$$

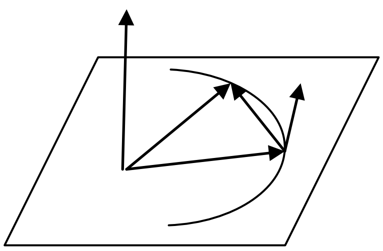
Cuando el $\sum \vec{F} \quad \vec{r}$ tenemos el caso de las fuerzas centrales.

6.1- FUERZAS CENTRALES

Fuerzas centrales son aquellas cuya dirección pasa por el origen. Ejemplo: fuerzas de la gravitación universal, fuerzas electrostáticas, etc

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza central, el momento angular de ese cuerpo se conserva, lo cual quiere decir que el movimiento de este cuerpo siempre se tiene que realizar en el mismo plano, porque al ser $\vec{L}$ un vector se tiene que conservar el módulo, la dirección y el sentido.

Se denomina **velocidad aerolar** de un cuerpo a la superficie que barre el radio central en la unidad de tiempo.



$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \ \wedge \ \overrightarrow{dr}\right| = \frac{1}{2} r \cdot dr \sin \alpha$$

Como dr = v . dt

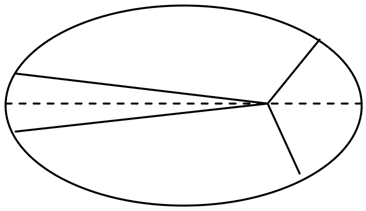
$$dA = \frac{1}{2} r \cdot v \ dt \sin \alpha$$

La velocidad aerolar es $Va = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \cdot v \ \sin \alpha$

Multiplicando y dividiendo por m

Va = 1/2m . r . v . m senα = 1/2m . L Luego $\boxed{V_a = \frac{L}{2m}}$

Si sobre un cuerpo actúa solo una fuerza central implica que L = cte y como m = cte quiere decir que la V_a es cte.



El teorema de las áreas dice que si sobre un cuerpo actúa únicamente una fuerza central su velocidad aerolar permanece cte, y su vector de posición barre áreas iguales en tiempos iguales

7.1- MODELO GOECÉNTRICO Y HELIOCÉNTRICO DEL UNIVERSO

Al hombre le ha interesado siempre conocer el funcionamiento del Universo, y para ello ha elaborado varios modelos, siendo los más importantes:

- Modelo geocéntrico
- Modelo heliocéntrico

El modelo geocéntrico fue propuesto por primera vez por Aristóteles en el siglo V a.c y en él la Tierra ocupa el centro del Universo y el Sol y los planetas giran alrededor de ella en órbitas circulares. Según este modelo, el Universo se divide en 2 submundos: uno el mundo celestial en el que se encuentra el Sol y los planetas, en donde todo es perfecto porque los astros describen órbitas circulares que es la más perfecta que existe, mientras que el submundo terrenal es imperfecto y los cuerpos caen hacia la Tierra porque es el centro del Universo. Este modelo fue perfeccionado en el año 150 d.c por Ptolomeo de Alejandría, al considerar que los planetas al describir órbitas circulares alrededor de la Tierra, se movían describiendo círculos alrededor de si mismos, creando un sistema muy complejo de círculos concéntricos.

El modelo heliocéntrico es debido a Copérnico que en 1530 dijo que en lugar de la Tierra, el centro del Universo lo ocupaba el Sol, y la Tierra y los demás planetas giraban en círculos concéntricos alrededor de él. Este modelo fue muy criticado tanto por la Iglesia como por el resto de la comunidad científica porque ponía en duda que el hombre fuera el centro del Universo.

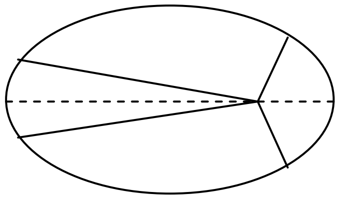
Años más tarde, Galileo al observar con un telescopio las lunas de Júpiter, confirmó el modelo de Copérnico ya que se comportaban como un sistema solar en miniatura, pero sus ideas fueron muy criticadas por la Iglesia que le obligó a abdicar de ellas.

8.1- LEYES DE KEPLER

En torno a 1600, el astrónomo danés Tycho Brahe se dedicó a medir minuciosamente con un sextante las posiciones del Sol y los planetas durante muchos años. Estas mediciones las heredó su discípulo Kepler, y basándose en ellas enunció tres leyes, denominadas Leyes de Kepler que explican el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

1ª Ley : Los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, encontrándose el Sol en uno de sus focos. Mediante esta ley anula la creencia de que las órbitas de los planetas eran circulares.

2ª Ley: El radio vector que une el planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.



Mediante esta ley demuestra que la velocidad lineal y angular con la que se mueven los planetas alrededor del Sol, no es constante.

3ª Ley: El cuadrado del periodo de revolución del planeta es directamente proporcional al semieje mayor elevado al cubo. Es decir es constante el cociente entre.

$$\boxed{\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_1^2} = \cdots = cte = \frac{R^3}{T^2}}$$

9.1- LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Newton, basándose en las leyes de Kepler, deduce la ley de la Gravitación Universal considerando las órbitas de los planetas como circulares.

Esta consideración produce un error muy pequeño dada la baja excentricidad de las órbitas elípticas, por lo tanto, la velocidad lineal y angular con la que describen los planetas sus órbitas es constante, y si son ctes, aparece una aceleración normal o centrípeta:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Supongamos un planeta de masa **m** que gira alrededor del Sol, cuya masa llamaremos **M**, en una órbita circular de radio **R**. La fuerza centrípeta que mueve el planeta es:

$$F = m \cdot a_n = m \cdot \omega^2 \cdot R = m\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$$

Multiplicando numerador y denominador por R^2

$F = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot R^3}{R^2 \cdot T^2}$ según la 3ª ley de Kepler $\frac{R^3}{T^2} = k_1 = cte$ $por\ lo\ que$ $F = k_1\frac{4\pi^2 m}{R^2}$

Por el principio de acción y reacción el planeta ejerce una fuerza sobre el Sol igual a:

$F' = k_2\frac{4\pi^2 M}{R^2}$ donde M es la masa del Sol. Al ser iguales las dos fuerzas $k_1 m = k_2 M$ o $\frac{k_1}{M} = \frac{k_2}{m} = K$ Despejando k_1 o k_2 y sustituyendo en las dos fuerzas de atracción:

$F = k \cdot 4\pi^2\frac{m \cdot M}{R^2}$ el producto $k \cdot 4\pi^2$ es cte y se representa por G ; $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$

Expresión que representa la fuerza de atracción mutua entre el Sol y el planeta

Si generalizamos esta expresión a todos los cuerpos existentes en el Universo tenemos la **Ley de la Gravitación Universal** que dice: " la fuerza de atracción entre dos cuerpos cualesquiera es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros de gravedad"

Matemáticamente $\boxed{F = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}}$ y vectorialmente sería $\boxed{\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^3} \vec{r}}$

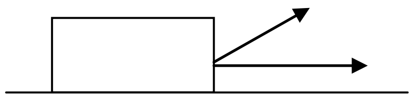
El signo (-) indica que los vectores $\vec{F}\ y\ \vec{r}$ son de sentido contrario

La constante $G = k4\pi^2 = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ se denomina constante de gravitación universal porque no depende del medio y vale siempre lo mismo.

Aproximadamente unos 100 años más tarde, Cavendish midió experimentalmente, mediante una balanza de torsión el valor de G, obteniendo el mismo valor

10.1- REPASO DE TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

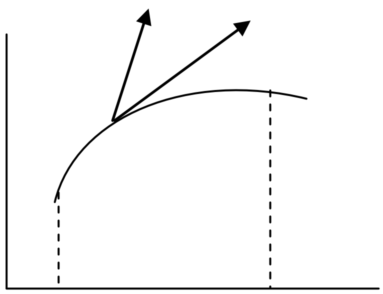
- **TRABAJO:** El trabajo realizado por una fuerza que produce un desplazamiento entre 2 puntos es igual al producto escalar de dicha fuerza por el desplazamiento producido. Es una magnitud escalar



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

En el S.I la unidad de trabajo es el julio

Esta definición de trabajo, sólo es válida en el caso de que la fuerza sea constante, y el desplazamiento sea una línea recta. En el caso de que no se cumpla ninguna de estas condiciones (1 o las 2), se divide la trayectoria en intervalos tan pequeños como nosotros queramos, de tal forma que en dicho intervalo, la fuerza puede considerarse constante y el desplazamiento rectilíneo.



El trabajo total a lo largo de todo el desplazamiento (de A a B) sería la suma de todos esos infinitésimos trabajos, esta suma es la integral $W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Si $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ vienen en función de sus componentes

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} \\ \overrightarrow{dr} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} \end{array}\right\} \quad W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz\right]$$

El trabajo coincide con el área debajo de la curva entre los puntos A y B

- **POTENCIA:** magnitud que indica la rapidez con la que se realiza el trabajo, y es igual al trabajo realizado entre el tiempo que se tarda en realizarlo.

$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta r}{\Delta t} = F \cdot v_{media}}}$$

La fuerza F es una fuerza cte que origina la velocidad media. Si la F que actúa no es cte:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cos \alpha$$

Expresión que nos permite calcular la potencia en un instante dado si en ese instante se conoce la fuerza y la velocidad.

En el S.I la unidad de potencia es el watio donde 1W = 1 J/1 s un múltiplo muy usado es el Kw = 1000 W

- **ENERGÍA:** es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo. Existen muchos tipos de energía como por ejemplo la energía cinética, la energía potencial, la energía calorífica, etc. Pero una de las cualidades de la energía es que se pueden transformar unas en otras.

  En este curso estudiaremos solamente la energía mecánica, que es la suma de la energía cinética mas la energía potencial de un cuerpo.

  Em = Ec + Ep

  La energía cinética es la que tienen los cuerpos debido a su velocidad, y se puede calcular mediante el trabajo que es preciso realizar para que partiendo del reposo un cuerpo de masa **m** sobre el que actúa una fuerza **F** durante un tiempo **t** adquiere una velocidad **v**

  El trabajo elemental realizado por esa fuerza durante un tiempo **dt** en el que el móvil recorre un espacio **dr** es:

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = m \cdot \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{dr} = m \cdot \overrightarrow{dv} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dv}$$

El trabajo total realizado en el intervalo de tiempo t es:

$$W = \int_A^B m\, \vec{v}\, \overrightarrow{dv} = m \int_A^B \vec{v}\, \overrightarrow{dv} = m \int_A^B v.dv \cos 0 = m \int_A^B v.dv = m \left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Como el cuerpo partió del reposo $V_A = 0$ y

W = ½ m v_B^2 a la expresión $\boxed{W = ½\, m\, v^2}$ se la conoce como **energía cinética** y a la

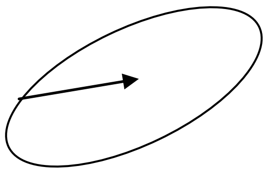
expresión $\boxed{W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$ **teorema de las fuerzas vivas** que dice:

El trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual a la variación de la energía cinética que experimenta el cuerpo en ese tiempo.

La energía potencial es la que tienen los cuerpos por encontrarse en un punto de un campo potencial. Si el campo es un campo gravitatorio la energía es potencial gravitatoria.

11.1- FUERZAS CONSERVATIVAS

Son las que realizan un trabajo a lo largo de una curva cerrada igual a cero.



Consideremos una fuerza **F** que traslada un cuerpo de **a** a **b** por el camino c_1 y luego de **b** a **a** por el camino c_2, si la fuerza es conservativa el **W = 0** luego:

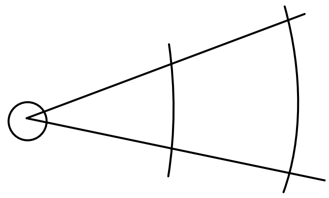
$$W = \int_{a_{c_1}}^{b} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{b_{c_2}}^{a} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{a_{c_1}}^{b} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{b_{c_2}}^{a} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{a_{c_2}}^{b} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Esto quiere decir que el trabajo que realiza una fuerza conservativa entre dos puntos es independiente del camino seguido, y solo depende del estado final y del estado inicial
Las fuerzas centrales son todas fuerzas conservativas como por ejemplo la fuerza gravitatoria y la fuerza electrostática.

12.1- ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

La fuerza gravitatoria, por ser una fuerza central, es una fuerza conservativa, por lo que el trabajo que realiza entre 2 puntos es independiente del camino seguido.

Para demostrar que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa vamos a suponer que el campo gravitatorio está creado por una masa **M** y que la fuerza gravitatoria desplaza una masa **m** desde el punto **A** al punto **B** primero pasando por el punto **P** y después pasando por el punto **P'** .El trabajo desde A a B pasando por P es igual a:



$$W_A^B = \int_A^B \vec{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^P \vec{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_P^B \vec{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^P \left|\vec{F_g}\right| \cdot \left|\overrightarrow{dr}\right| \cos 180° + \int_P^B \left|\vec{F_g}\right| \cdot \left|\overrightarrow{dr}\right| \cos 90° = -\int_A^P F_g \cdot dr = -\int_A^P G\frac{Mm}{r^2} \cdot dr = -G\,M\,m \int_A^P \frac{dr}{r^2} = -G\,M\,m\left[-\frac{1}{r}\right]_A^P = -GMm\left[\left(-\frac{1}{r_P}\right) - \left(-\frac{1}{r_A}\right)\right] = G\frac{Mm}{r_P} - G\frac{Mm}{r_A} = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

Operando de idéntica forma desde **A** a **B** pasando por **P'**

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^{P'} \vec{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{P'}^B \vec{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^{P'} \left|\vec{F_g}\right| \cdot \left|\overrightarrow{dr}\right| \cos 90° + \int_{P'}^B \left|\vec{F_g}\right| \cdot \left|\overrightarrow{dr}\right| \cos 180° = -\int_{P'}^B G\frac{Mm}{r^2} \cdot dr = -G\,M\,m \int_{P'}^B \frac{dr}{r^2} = -G\,M\,m\left[-\frac{1}{r}\right]_{P'}^B = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_{P'}} = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

El trabajo realizado por los dos caminos es lo mismo lo que demuestra que F_g es una fuerza conservativa.

La Energía potencial viene dada por: $\boxed{E_P = -G\frac{Mm}{r}}$

Si $r \to \infty \Rightarrow E_P \to 0$ lo cual quiere decir que el origen de la energía potencial gravitatoria se encuentra en el ∞ y la **Ep** dentro del campo gravitatorio es (-) y va disminuyendo a medida que nos acercamos a la masa **M** que crea el campo gravitatorio.

Por otra parte: $W_A^B = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A} = -\left(-G\frac{Mm}{r_B} + G\frac{Mm}{r_A}\right) = -\left(E_{P_B} - E_{P_A}\right) = -\Delta E_P$

Luego el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para llevar una masa **m** desde el punto **A** al **B** es igual a menos la variación de la energía potencial, y si **B** se encuentra en el ∞ queda:

$$W_A^{\infty} = -\left(0 - E_{P_A}\right) = E_{P_A} = -G\frac{Mm}{r_A}$$

Luego la energía potencial en un punto de un campo gravitatorio es igual al trabajo con signo (-) que realiza la fuerza gravitatoria para llevar la masa **m** desde dicho punto al ∞

Como el trabajo para separar dos masas es (-) el proceso no es espontáneo mientras que cuando se juntan el W que realiza la fuerza gravitatoria es (+) y el proceso es espontáneo.

13.1- CAMPO GRAVITATORIO. LÍNEAS DE CAMPO. FLUJO

En física, un campo es la región del espacio en el cuál en cada uno de sus puntos se pone de manifiesto valores iguales o distintos de una determinada magnitud física.

Si la magnitud es escalar, el campo es **escalar**, y si la magnitud es vectorial, el campo es **vectorial.**

Si los valores de la magnitud que determina el campo permanecen constantes en todo el campo o en una región del campo, este es **constante o uniforme**, y si los valores de la magnitud no dependen del tiempo, sino del lugar en el que se encuentran en el espacio, el campo es **estacionario.**

Los campos escalares, se representan mediante líneas o superficies equipotenciales, que son los lugares geométricos de los puntos del campo en los cuales la magnitud tiene el mismo valor

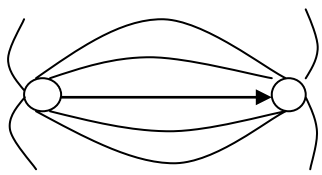
Ejemplo de campos escalares representados por líneas equipotenciales son las isotermas, y de los representados por superficies equipotenciales son las curvas o superficies de nivel.

Los campos vectoriales se representan mediante líneas de campo o líneas vectoriales, que son las líneas imaginarias en las cuales el vector que determina el campo es tangente a la línea en cada punto de la misma.

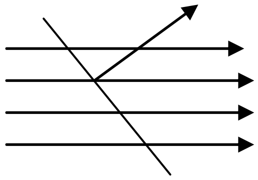
La intensidad de la magnitud vectorial en un punto del campo, viene dada por el número de líneas de campo que atraviesa a la unidad de superficie colocada perpendicularmente a dichas líneas.

Si el campo es uniforme las líneas vectoriales se dibujan paralelas y simétricas.

El punto del campo donde salen más líneas de fuerza de las que entran se llama **fuente**, y al revés donde entran más líneas de las que salen se llama **sumidero.**



Se denomina **Flujo del Campo** a través de una superficie al número de líneas de fuerza que atraviesan dicha superficie.



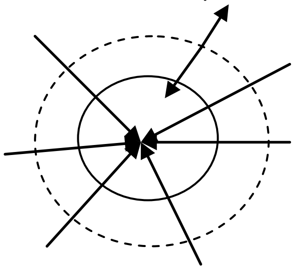
Si el campo es uniforme y la superficie es plana el flujo es igual al producto escalar del campo por el vector superficie, donde el vector superficie siempre es perpendicular a la superficie que representa.

$$\boxed{\emptyset = \vec{a} \cdot \vec{S} = a \cdot S \cdot \cos \alpha}$$

Si el campo no es uniforme (cte), o la superficie no es plana o ambos a la vez, el flujo es igual a la integral:

$$d\emptyset = \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \emptyset = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S a \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

El campo gravitatorio terrestre al igual que todos los campos gravitatorios, se representa mediante líneas de fuerza, que son las líneas imaginarias que seguirían la unidad de masa colocada en cada punto del campo gravitatorio.



En el caso del campo gravitatorio terrestre, estas líneas son radiales y dirigidas hacia el centro de la Tierra

El flujo del campo gravitatorio que atraviesa una superfície esférica que rodea a la Tierra, vendrá dada por la siguiente expresión.

$$\emptyset = \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint g \cdot dS \cos 180° = -g \oint dS = -g 4\pi r^2$$

Los campos solo se ponen de manifiesto por los efectos que producen sobre una partícula activa. Ejemplo: en el campo gravitatorio la partícula activa es la masa y en el campo eléctrico la partícula activa es la carga.

Se denomina **intensidad del campo** en un punto del campo, a la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad de partícula activa colocada en dicho punto, siendo su fórmula:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{A}$$ Donde A es la partícula activa

Si la magnitud que determina el campo vectorial es una fuerza, el campo es un campo de fuerzas y las líneas que lo representan son líneas de fuerza. Ejemplo: el campo gravitatorio o el campo electrostático.

Los campos de fuerza conservativos, se pueden caracterizar mediante una magnitud escalar que es el potencial del campo, que indica la energía potencial que tiene la unidad de partícula activa colocada en un punto del campo.

$$V = \frac{E_P}{A}$$

Teniendo en cuenta que: $W_1^2 = -\Delta E_P = -\left(E_{P_2} - E_{P_1}\right)$

Y dividiendo por A queda: $\frac{W_1^2}{A} = -\frac{(E_{P2} - E_{P1})}{A} = -\left(\frac{E_{P2}}{A} - \frac{E_{P1}}{A}\right) = -(V_2 - V_1) = -\Delta V$

Esto nos permite decir que la diferencia de potencial entre 2 puntos de un campo conservativo es el trabajo con signo cambiado que realiza el campo para trasladar la unidad de partícula activa entre los dos puntos del campo.

Siempre que colocamos una masa en un punto del espacio, a su alrededor crea un campo gravitatorio que se pone de manifiesto por la fuerza que ejerce sobre cualquier otra masa colocada en un punto de dicho campo. Si la masa que crea el campo gravitatorio es la Tierra, el campo generado es el **campo gravitatorio terrestre** que como la fuerza gravitatoria es conservativa, el campo gravitatorio terrestre es conservativo, y como todos los campos conservativos se caracteriza por 3 magnitudes que son:

- La intensidad
- El potencial
- Las líneas de fuerza

14.1- INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE. DETERMINACIÓN DE $\vec{g}$

La intensidad de un campo gravitatorio en un punto, es la fuerza por unidad de masa que ejerce el campo gravitatorio en dicho punto.

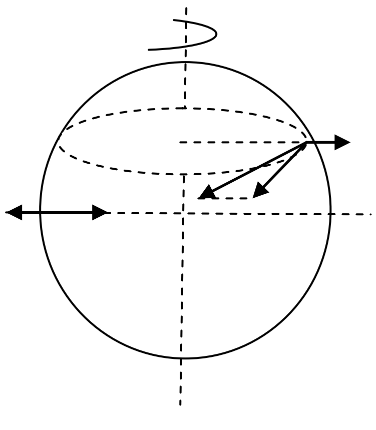
$g = \frac{F}{m} = \frac{G\frac{Mm}{r^2}}{m} = G\frac{M}{r^2}$ La expresión vectorial es: $\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r}}$

En donde el signo (-) es debido a que los vectores $\vec{g}$ y $\vec{r}$ tienen la misma dirección pero sentido contrario.

Como la Tierra se considera una esfera con su masa uniformemente distribuida, y como veremos más adelante, se comporta como una masa puntual colocada en el centro de la Tierra, todas las distancias se calculan desde su centro.

En el caso del campo gravitatorio terrestre, a la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos, se la denomina peso $g = \frac{P}{m}$; $\boxed{P = m \cdot g}$

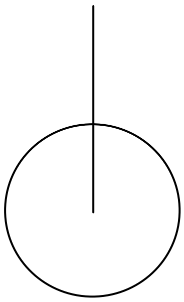
La intensidad en cada punto del campo gravitatorio es una magnitud vectorial cuya dirección y sentido coinciden con las del peso: dirección vertical y sentido hacia el centro de la Tierra. Su unidad en el S.I es el N/kg que coincide con las dimensiones de una aceleración pero no es una aceleración aunque su valor en la superficie terrestre también es 9,8 N/kg.



Como **g** es inversamente proporcional a **r** y la Tierra no es perfectamente redonda y además por el movimiento de rotación aparece una fuerza centrífuga el valor de g es máximo en los polos y mínimo en el ecuador, porque en cada punto de la Tierra sucede que $m\vec{g} = m\vec{g}_0 + \vec{F}_c$ y en el ecuador restan, mientras que en los polos no.

15.1- VARIACIONES DE LA INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO CON LA ALTURA

- **A UNA ALTURA DETERMINADA**



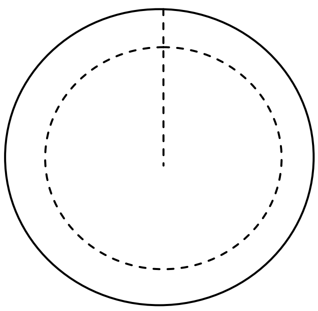
La distancia de **P** al centro de la Tierra es igual a **$r = h + R_T$** la intensidad en un punto de la superficie terrestre es:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \text{y en el punto } \mathbf{P} \\ g &= G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{g_0}{g} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}} = \frac{(R_T+h)^2}{R_T^2} =$$

$$\frac{R_T^2+2hR_T+h^2}{R_T^2} = 1 + \frac{2h}{R_T} + \left(\frac{h}{R_T}\right)^2 = \left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2$$

$Luego\ despejando$ $\boxed{g = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}}$

- **A UNA PROFUNDIDAD EN EL INTERIOR DE LA TIERRA**



Si el punto **P** está en el interior de la Tierra $r = R_T - h$ y m la masa de la esfera interior.

$$\left.\begin{aligned} M_T &= \partial \cdot V_T = \partial\frac{4}{3}\pi R_T^3 \\ m &= \partial \cdot V = \partial\frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}\right\} \quad \frac{M_T}{m} = \frac{R_T^3}{r^3} \quad \Rightarrow \quad m = M_T\frac{r^3}{R_T^3}$$

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\frac{M_T}{R_T^2} \\ g &= G\frac{m}{r^2} = G\frac{M_T r^3}{R_T^3 r^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{g_0}{g} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_T r}{R_T^3}} = \frac{R_T}{r} = \frac{R_T}{R_T-h} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{g_0}{\frac{R_T}{R_T-h}} = g_0\frac{R_T-h}{R_T} = g_0\left(1-\frac{h}{R_T}\right)$$

$\boxed{g = g_0\left(1-\frac{h}{R_T}\right)}$ Esta expresión indica que en el centro de la Tierra como $h = R_T \Rightarrow g = 0$

De las expresiones anteriores se deduce, que la intensidad del campo gravitatorio crece linealmente con la distancia al centro de la Tierra en el interior del planeta, adquiere un valor máximo en la superficie y, posteriormente decrece en el exterior del planeta.

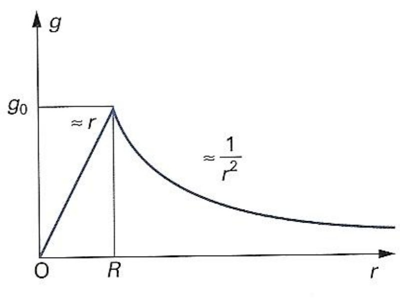
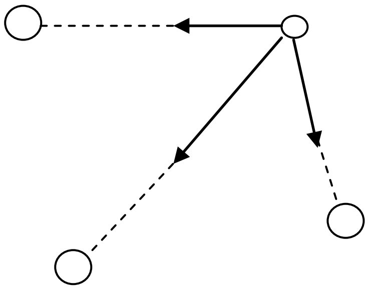


Figura 5.20. Variación de la intensidad del campo gravitatorio terrestre con la distancia al centro de la Tierra.

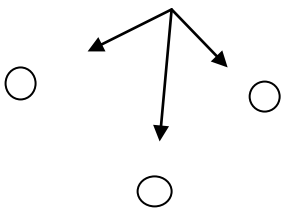
16.1- DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE MASAS: PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Cuando hay más de 2 masas que crean el campo gravitatorio, la fuerza que ejerzan todas sobre una de ellas, es igual a la suma de las fuerzas que ejercen cada una sobre la otra si se encontraran aisladas.



$$\overrightarrow{F_T} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

En el caso de la intensidad del campo gravitatorio, el campo que crean todas las masas en un punto P, es la suma vectorial de los campos que cada masa crea individualmente en dicho punto. A este principio se le llama **principio de superposición.**



$$\overrightarrow{F_T} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

Y como $\vec{g}_T = \frac{\vec{F}_T}{m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3}$$

17.1- POTENCIAL GRAVITATORIO. DIFERENCIA DE POTENCIAL

El potencial de un campo gravitatorio en un punto delcampo, es la energía potencial que tiene la unidad de masa, colocada en dicho punto del campo.

$V = \frac{E_P}{m} = \frac{-G\frac{Mm}{r}}{m} = -G\,\frac{M}{r}$ En donde **M** es la masa que crea el campo

Si r $\rightarrow \infty \Rightarrow V \to 0$ Luego en un campo gravitatorio el origen de potenciales se encuentra en el infinito porque en el infinito vale 0, y en cualquier punto dentro del campo gravitatorio es negativo, disminuyendo a medida que nos acercamos a la masa que crea el campo. Por otra parte:

$W_A^B = -\Delta E_P = -\left(E_{P_B} - E_{P_A}\right)$ Si dividimos los dos miembros de la igualdad por el mismo valor de **m** esta no varía

$$\frac{W_A^B}{m} = -\left(\frac{E_{P_B}}{m} - \frac{E_{P_A}}{m}\right) = -(V_B - V_A) = V_A - V_B$$

La diferencia de potencial gravitatoria entre dos puntos es el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para trasladar la unidad de masa entre dichos puntos.

Si el punto está en el ∞

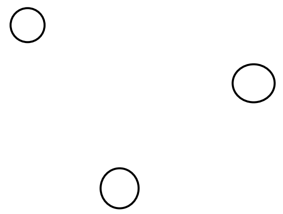
$$\frac{W_A^{\infty}}{m} = V_A - V_{\infty} \quad y\ como \quad V_{\infty} = 0 \quad ; \quad \boxed{V_A = \frac{W_A^{\infty}}{m}}$$

Esta expresión nos permite definir el potencial de un campo gravitatorio en un punto como el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para trasladar la unidad de masa desde dicho punto hasta el ∞

Por otra parte, el trabajo que realiza el campo para trasladar una masa m entre dos puntos es: $W_A^B = -m(V_B - V_A) = m(V_A - V_B)$

En el S.I la unidad de potencial gravitatorio es el J/kg

En el caso de que sean varias masas las que crean el campo, el potencial en un punto del campo es la suma aritmética de los potenciales que crean cada una de las masas consideradas individualmente en dicho punto.



$V_T = V_1 + V_2 + V_3$ porque son magnitudes escalares.

Se denominan **superficies equipotenciales**, aquellas superficies en las cuales en todos sus puntos el potencial vale lo mismo, por lo tanto, el trabajo que realiza el campo para trasladar una masa entre 2 puntos de la superficie equipotencial vale 0.

Efectivamente: $W_A^B = m(V_A - V_B)$ pero como $V_A = V_B$ implica $W_A^B = m \cdot 0 = 0$

La relación entre el campo y el potencial gravitatorio es:

$\Delta E_P = \left(E_{P_B} - E_{P_A}\right) = -W_A^B = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dividiendo los dos miembros por **m**

$$\frac{E_{P_B}}{m} - \frac{E_{P_A}}{m} = -\int_A^B \frac{\vec{F}}{m} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B g \cdot dr \cdot \cos\alpha$$

Para variaciones infinitesimales queda:

$$dV = -g\, dr \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad g \cos\alpha = -\frac{dV}{dr}$$

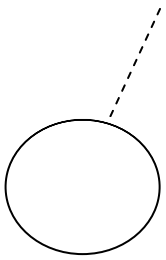
De esta expresión se deduce que laslíneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales, ya que la diferencia depotencial entre dos puntos deuna superficie equipotencial es igual a 0 y si g≠0 entonces $\cos\alpha = 0 \ y\ por\ ello\ \alpha = 90°$

18.1- VELOCIDAD DE ESCAPE

Para lanzar un cohete al espacio, hay que lanzarlo con una velocidad mínima para que salga fuera del campo gravitatorio. A esta velocidad se la denomina **velocidad de escape.**

Para calcular la velocidad de escape, despreciamos las pérdidas de energía debidas al rozamiento con el aire porque solo suponen un 2% de la velocidad de escape.

Supongamos un cohete de masa **m** situado en el infinito y en reposo por lo que su Ec y Ep valen cero. Si debido a la atracción gravitatoria cae a la Tierra y en la superficie tiene una Ec y una Ep . Por el principio de la conservación de la energía se cumple:



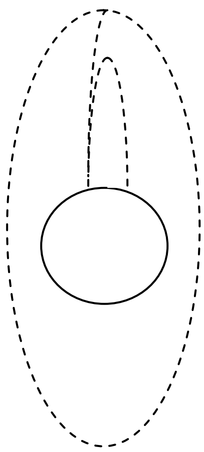
$$E_{m\,1} = E_{m\,2} \;\; ; \;\; E_{c\,1} + E_{P\,1} = E_{c\,2} + E_{P\,2}$$

$$\frac{1}{2} m V_{es}^2 - G \frac{M_{Tm}}{R_T} = 0 + 0 \quad ; \quad \frac{1}{2} m V_{es}^2 = G \frac{M_{Tm}}{R_T}$$

Y la $\boxed{v_{es} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$

Si sustituimos los valores de las magnitudes **G , M_T y R_T** se obtiene un valor de la velocidad de escape de $v_{es} = 11{,}2 \cdot 10^3$ m/s que equivale a unos 41150 km/h.

19.1- MOVIMIENTO BAJO LA ACCIÓN GRAVITATORIA DE UN PLANETA: ÓRBITAS DE SATÉLITES

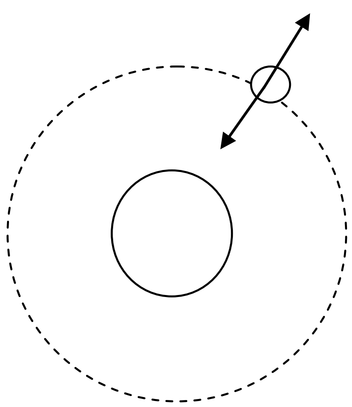


Si lanzamos un satélite desde lasuperficie terrestre con una velocidad mucho menor que la velocidad de escape describe un arco de elipse y vuelve a caer a la superficie terrestre. A medida que aumentamos la velocidad de lanzamiento el arco de elipse se va abriendo hasta que para una determinada velocidad , se abre lo suficiente para que se cierre la elipse y el satélite queda en órbita, con una velocidad máxima en el punto mas cercano a la Tierra que se llama **perigeo** y una velocidad mínima en el mas lejano que se llama **apogeo**

Si el satélite lo lanzamos con una velocidad igual a la velocidad de escape, sale fuere del campo gravitatorio terrestre describiendo una parábola.

Si la $v > v_{es}$ sale del campo gravitatorio terrestre pero describiendo una hipérbola

Para que el satélite se mantenga en órbita tiene que tener una velocidad que podemos calcular suponiendo un radio medio de la órbita.



Fg = Fc ; $G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}}$

Como la velocidad de escape es:

$$v_{es} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_{órbita}$$

Esta sería la fórmula de la velocidad de escape del cohete desde cualquier órbita.

A la energía que tiene el satélite en cada órbita se le denomina **energía de enlace del satélite** y se calcula:

$$E_{órbita} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_s v_{or}^2 - G\frac{M_T . m_s}{r}$$

Sustituyendo la velocidad de la órbita por su valor:

$$E_{órbita} = \frac{1}{2} m_s \left(\sqrt{G\frac{M_T}{r}}\right)^2 - G\frac{M_T . m_s}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T . m_s}{r}$$

Si el satélite tiene una energía (-) quiere decir que el satélite está ligado al planeta. Si la E_{or} = 0 sale fuera de la órbita describiendo una parábola, y si la E_{or} > 0 sale fuera del campo describiendo una hipérbola.

Por último se denomina **satélite geoestacionario** al satélite que se encuentra siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre, por lo que su periodo coincide con el de la Tierra, es decir, 24 horas.

El radio de su órbita se calcula:

$$F_g = F_c \quad ; \quad G\frac{M_T\, m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad ; \quad G\frac{M_T m}{r} = m\omega^2 r^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} r^2 \quad ; \quad r^3 = \frac{G M_T T^2}{4\pi^2}$$

$\Rightarrow \; r = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$ y sustituyendo valores queda que r = 42233 km

Luego la altura a la que se encuentra la órbita es:

r = h – R_T ⇒ h = r – R_T = 42233 – 6370 = 35863 km

<u>20.1- TEORÍAS SOBRE EL ORIGEN DEL UNIVERSO Y SU EVOLUCIÓN</u>

En 1929 el astrónomo norteamericano Edwin Hubble observó la existencia de otras muchas galaxias en el Universo además de la Via Lactea, y al analizar su luz , descubrió que se alejaban unas de otras a una velocidad que era proporcional a la distancia que las separaba según la fórmula:

V = H . d donde H = 2,32 . 10^{-8} s^{-1} (parámetro de Hubble)

Como consecuencia de este descubrimiento, el modelo heliocéntrico de Copérnico deja de tener sentido, ya que aunque el Sol sigue siendo el centro de nuestro sistema planetario, este, forma parte de una galaxia (Via Láctea) que a su vez es una mas de las muchas que existen en el Universo.

Luego si las galaxias se alejan, hace millones de años tuvierón que estar más cerca. En 1950 un ruso George Gamov plantea la teoría del **Big-Bang,** según la cuál hace aproximadamente 13700 millones de años, se produjo una gran explosión ocurrida en un Universo de dimensiones inferiores a un átomo, con una gran densidad y a una altísima temperatura (10^9 K). Al expandirse el Universo, se fue enfriando, las partículas (electrones, neutrinos, fotones y algunos neutrones y protones) comenzaron a moverse más lentamente y la **interacción fuerte** pudo unir protones y neutrones formando núcleos, al enfriarse más, la **interacción electromagnética** formó átomos muy ligeros (H y He) que al condensarse formaron un polvo interestelar que por efecto de la **interacción gravitatoria** comenzó a ataerse, concentrarse, aumentando su densidad y temperatura que propiciarón reacciones de fusión nuclear que originaron las primeras estrellas. La parte de materia que estaba a una distancia media no fue atraida por la estrella, se aglutinó, y formó los planetas.

Gamov también predijo que como consecuencia de la gran explosión debería observarse en el universo una radiación de fondo de microondas, lo que fue confirmado experimentalmente por Arno Penzias y Robert Wilson.

El tiempo transcurrido desde el Big-Bang hasta nuestros días lo podemos calcular por la separación entre dos galaxias:

$$t = \frac{d}{H} = \frac{d}{H.d} = \frac{1}{H} = \frac{1}{2{,}32.\,10^{-18}s^{-1}} = 1{,}3710^{10}años = 13700\,millones\ de\ años$$

El destino del Universo dependerá de la rapidez de su expansión, y de la cantidad de materia que contiene, algo que se desconoce, por lo que existen dos posibilidades:

Si la cantidad de materia es elevada, la densidad supera un cierto valor crítico, entonces la interacción gravitatoria frenará la expansión y las galaxias se detendrán. A continuación, volverán a acercarse unas a otras hasta concentrarse de nuevo. A este acontecimiento de colapso se le denomina **Big-Crunch** y será el final de la historia del Universo.

Si la cantidad de materia es baja, la densidad es inferior al valor crítico, entonces la interación gravitatoria es muy debil y no será capaz de detener la expansión. Las galaxias seguirán alejándose unas de las otras para siempre, las estrellas se consumirán y el Universo será cada vez más frio y vacío.

Las estrellas al envejecer, agotan su combustible nuclear y se hacen más pequeñas, convirtiéndose en enanas blancas o en estrellas de neutrones (más pequeñas todavia). Al disminuir su radio, como tienen la misma masa, la intensidad del campo gravitatorio en su superficie aumenta, y también la velocidad de escape, que puede ser tan grande que impide que incluso la luz escape convirtiéndose en un **agujero negro.**

Los agujeros negros forman parte de la **materia oscura** predicha por el suizo Fritz Zwicky en 1933, quien observó, que la velocidad orbital de las estrellas que estaban más alejadas del centro de las galaxias era mayor que la que predecía la teoría ($v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$) y esto solo era posible, si la galaxia tenía más materia que la que se veía. A la materia que no se veía la llamó **materia oscura,** y si se determina cuanta materia oscura hay en el Universo podemos predecir si el Universo se expanderá indefinidamente o si llegará el momento que se detendrá y comenzará a contraerse hasta llegar al Big-Crunch.